	INSTITUCIÓN EDUCATIVA BENEDIKTA ZUR NIEDEN	
	Gestión Pedagógica y Académica **Proceso de Diseño Curricular**	
	GUÍA DE ACTIVIDAD ACADÉMICA	

FECHA:	8 de junio al 11 de Junio	Página 1 de 4
NÚMERO GUIA:	5	

TÍTULO DE LA ACTIVIDAD:	**MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN**		
ELABORADO POR:	Oswaldo Sánchez		
ÁREA:		GRADO:	PERIODO:
Matemáticas		Noveno	II
COMPETENCIA y COMPONENTE DEL ÁREA			
Resolución: Metrico-espacial			
ESTÁNDARES			
Reconozco y describo curvas o lugares geométricos y uso argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias			
APRENDIZAJES			
Explora y describe las propiedades de los lugares geométricos yde sus transformaciones a partir de diferentes representaciones			
EVIDENCIAS			
Localiza objetos geométricos en el plano cartesiano.			
PLATAFORMA VIRTUAL			
Página web del docente: oasanez.jimdofree.com			
SUGERENCIA METODOLÓGICA (MOMENTOS)			
MOTIVACIÓN Y EXPLORACIÓN DE SABERES PREVIOS			

HISTORIA DE LAS DEMOSTRACIONES EN MATEMÁTICAS

La geometría es la parte de la matemática sobre la que descansa nuestra concepción clásica de demostración. Ahora, con la cada vez más intensa presencia de las computadoras en el sistema educativo, surge la necesidad de repensar el papel de la demostración en el salón de clases. Una pregunta que motiva esta necesidad, es la siguiente: Si el propósito de las demostraciones en matemáticas es obtener certeza, y si las computadoras suministran certeza absoluta, ¿por qué entonces tomarse el trabajo de realizar demostraciones en el salón de clases? Esta pregunta ejemplifica el hecho, ampliamente aceptado, de que la concepción que tengamos de la matemática tendrá una influencia sobre el enfoque didáctico con el que la abordamos como objeto de enseñanza.

Para tratar de responder a quienes hacen la pregunta anterior es pertinente observar, en primer lugar, que la historia de las matemáticas nos permite acceder a una forma de conceptualización de esta disciplina compatible con los propósitos educativos a los que adherimos. En efecto, a través de la historia podemos entender el carácter evolutivo de los conceptos y las teorías, así como el carácter transitorio de los "hechos" que, por otra parte, parecieran establecidos de una vez y para siempre.

Detrás del rostro contemporáneo de las teorías y metodologías matemáticas hay todo un progreso gradual de organización que tiende a objetivar el conocimiento en estructuras más estables. Para la educación matemática (y estas consideraciones quizás sean válidas para el conjunto de las ciencias naturales) es fundamental que esta manera de concebir el conocimiento: como un proceso incesante de organización y no como un producto inmodificable en el tiempo, se logre construir por el lado tanto del estudiante como del profesor. De allí que, por otra parte, para comprender el papel y la posición de las demostraciones en la educación matemática, es pertinente estudiar cómo es que ellas han evolucionado a lo largo del desarrollo histórico de la matemática. En efecto, las demostraciones han sido, en cada época, reflejo estructural de las concepciones matemáticas de ese entonces. Este es un hecho fundamental que la educación no puede ignorar.

Se ponen de manifiesto, a través de él, los vínculos entre un problema de naturaleza epistemológica y uno de naturaleza cognitiva. Para ilustrarlo, daremos ejemplos tomados de la geometría elemental; siendo posible, además, establecer nexos con nuestra práctica docente. La educación matemática es una empresa interdisciplinaria. Es importante por ello tratar de explicitar las relaciones entre la historia, la epistemología, la educación y la cognición. En el enfoque constructivista que anima nuestro programa, la historia de las matemáticas se concibe como un laboratorio en donde se cuestionan diversas hipótesis sobre la construcción del conocimiento. Los resultados de este trabajo han de ser comparados con los correspondientes a la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes; el propósito último de la comparación es tratar de establecer cuáles son los mecanismos constructivos comunes a ambas construcciones, que siguen estando en juego en el salón de clases.

DESARROLLO

MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN EN MATEMÁTICAS

Tratamos en este apartado los siguientes mecanismos lógicos:

- Método directo.
- Reducción al absurdo.
- Contra recíproco.
- Bicondicionales (doble implicación).
- Equivalencias múltiples.
- Método de inducción.
- Contraejemplos.

Método directo En los libros de texto se suele leer: “Si A, entonces B” “Para que se cumpla B es suficiente que se cumpla A” “B es una condición necesaria para que se cumpla A” Se trata de de demostrar que si se cumple la propiedad A, entonces se verifica B.
Ejemplos: i) Si a es un número real, sabiendo que en el conjunto de los números reales se cumple la propiedad distributiva del producto respecto de la suma y que 0 es el elemento neutro de la suma, probar que a×0 =0.
ii) Si n es un número natural impar, probar que n 2 es de la forma 8k+1, para algún entero k≥1.
iii) Demostrar que para cada terna de números reales positivos a, b, c se cumple que a/(b+c) + b/(a+c) + c/(a + b) ≥ 1.
iv) Dado un entero positivo n, probar que n 3 -n es siempre múltiplo de 3.
v) Demostrar que las soluciones de la ecuación ax2+bx+c=0, donde a,b,c son números reales, vienen dadas a través de la fórmula (-b±√b 2 -4ac)/2. A → B

Reducción al absurdo Para probar que una propiedad A es verdadera, se supone que A es falsa y se llega a una contradicción. Evidentemente, empleamos el hecho de que una proposición en Matemáticas ó es verdadera ó es falsa, pero no ambas cosas a la vez.
Hay que decir que este recurso era muy querido por los matemáticos griegos. Hay quienes opinan que es preferible dar, si es posible, demostraciones directas, para de esa forma no confundir al alumno con tantas suposiciones que lleguen a crearle una sensación de falta de control en el razonamiento, al no poder saber en cada momento qué es cierto o qué es falso.
Ejemplos: i) Probar que √2 es un número real irracional.
ii) Demostrar que hay infinitos números primos (Euclides).

Contra recíproco Este mecanismo de demostración se basa en el hecho de que la implicación A→ B es equivalentemente lógica a NO B NO A. Este mecanismo es aconsejable cuando no sabemos cómo trabajar a partir de la hipótesis A y, en cambio, la negación de B proporciona un buen punto de partida. No se debe confundir el contra recíproco con el mecanismo de reducción al absurdo.
Ejemplos: i) Si n 2 es un número natural par, entonces n es par. ii) Sean x, y números reales. Si x 2+y2=0, entonces x=0 e y=0. Doble implicación El recíproco de la implicación A → B es B → A. Obviamente si se cumple una implicación no tiene por qué cumplirse necesariamente la otra. Por ejemplo, si A representa a la propiedad de que un número natural es múltiplo de 6 y B a la de ser múltiplo de 3, tenemos que A → B pero su recíproco es cierto (¿sabría demostrarlo?). Cuando se tiene que tanto la implicación A → B como su recíproco B → A son ciertas, decimos que A →B↔ NO B→ NO A las condiciones A y B son equivalentes y empleamos el signo de la doble implicación. En los textos aparece desarrollada esta doble implicación en sentencias del tipo: “Probar que A y B son equivalentes” “Probar que se cumple A si, y sólo si, se cumple B” “Una condición necesaria y suficiente para que se dé A es que se verifique B”
Ejemplos: i) Dados dos números reales x,y se cumple que x 2+y2=0 si, y sólo si, x=0 e y=0.
ii) Dados dos enteros n, m se cumple que n·m es par si, y sólo si, n es par ó m es par.
iii) Para que un paralelogramo sea un rectángulo es condición necesaria y suficiente que sus diagonales tengan la misma longitud.

Equivalencias múltiples: A lo largo de la carrera nos encontraremos con enunciados que afirmen que una serie de propiedades son equivalentes.

Por ejemplo, en Álgebra Lineal se demuestra el siguiente resultado. “Dada una matriz A con n filas y n columnas, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) A es invertible
ii) A tiene rango n
iii) Las filas de A son vectores linealmente independientes
iv) El sistema homogéneo de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes A es determinado
v) A tiene determinante no nulo” En este caso, estamos diciendo que las condiciones se implican unas a otras, así que en cuanto sepamos que una de ellas es cierta (o no se cumple) entonces del resto podremos decir lo mismo. Existen muchas formas de demostrar el resultado anterior, en el sentido de que podemos escoger distintos itinerarios de implicaciones, eso sí, en las que intervengan todas las condiciones y de modo que dicho itinerario forme un bucle cerrado. Por ejemplo, una posible vía sería i) → ii) → iii) → iv) → v) → i) Otra posibilidad puede ser i) v) junto con ii) → iii) → v) → iv) → ii) Etcétera.

Ejemplo: Probar que, dados dos números reales no negativos a,b las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $a < b$
ii) $a^2 < b^2$
iii) $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

Método de inducción Sea P(n) una propiedad relacionada con el número natural n. – Se demuestra que P(1) es cierta. – Se prueba que si P(k) es cierta, entonces P(k+1) también lo es. En ese caso, la propiedad P(n) es válida para cualquier n Є N.

Ejemplo: Probar por inducción que la suma de los n primeros enteros positivos es igual a n(n+1)/2: $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n+1)/2$ En este caso, P(n)=la suma de los n primeros enteros positivos es n(n+1)/2 La propiedad es cierta para n=1: P(1)=1=1(2)/2=1 Es conveniente ver que también es cierta para algunos valores más P(2)=1+2=3=2(3)/2; P(3)=1+2+3=6=3(4)/2. La dificultad del método de inducción está en probar el paso general, esto es, demostrar que si suponemos que la propiedad es cierta para k, también lo es para k+1. Se supone que P(k)=k(k+1)/2 y queremos probar que la fórmula sigue siendo válida también para k+1, es decir, que P(k+1)=(k+1)(k+2)/2. Vamos allá. P(k+1)=1 + 2 + … + k + (k+1)= P(k) + (k+1) = aplicamos la hipótesis de inducción =k(k+1)/2 +(k+1)=(k+1)[k/2+1]=(k+1)(k+2)/2, como queríamos probar.

Ejercicios: i) Encontrar una fórmula para 2+4+6+ … +2n, n≥1, y demostrarla por inducción.

ii) Probar por inducción que para n>0 la derivada de $f_n(x)=x^n$ es $f_n'(x)=nx^{n-1}$. Dos observaciones: También se puede aplicar el método de inducción para probar que una propiedad es cierta a partir de un valor k_0, no tenemos por qué empezar necesariamente la inducción por 1. En segundo lugar, cuando demostramos el paso general además de suponer que la propiedad P(k) es cierta en un paso k podemos utilizar que la propiedad es cierta para 1, 2, …, k. Contraejemplos A veces, la validez de una propiedad se refuta dando un ejemplo en el que no se cumple dicha propiedad: habremos probado entonces que,en general, la propiedad en cuestión es falsa. A dichos ejemplos que echan abajo la validez de la propiedad se les conoce con el nombre de contrajemplos. En muchas ocasiones, cuando nos enfrentamos a resolver un problema y vemos que la propiedad que queremos demostrar no tiene un ataque sencillo, nos podemos plantear la posibilidad de encontrar un contrajemplo.

Ejercicios: i) ¿Es cierto que para cada entero positivo n se cumple que $f(n)=n^2 -n+17$ es un número primo?

ii) ¿Es cierto que la derivada de una función derivable y periódica sigue siendo periódica? ¿Y qué podemos decir de la integral de una función periódica integrable?

iii) Leibniz probó que para cualquier entero positivo n se cumple → $n^3 -n$ es múltiplo de 3 → $n^5 - n$ es múltiplo de 5 → $n^7 -n$ es múltiplo de 7 A la vista de esos resultados, ¿podemos concluir que, en general, $n^k -n$ es divisible por k

CIERRE

1. Demostrar el teorema de Pitágoras por alguno de los métodos vistos (consultarlo y transcribirlo)
2. Consultar un ejemplo de una demostración por el método de reducción al absurdo y por inducción

EVALUACIÓN

En el cuaderno de matemáticas copiamos: el título, ejemplos y los ejercicios de manera organizada

para poder tomarle fotos, organizarlas en un solo archivo de Word o PDF y subirlas a teams.	
RECURSOS	TIEMPO ESTIMADO
Libro de matemáticas larouse: **todos por un nuevo país**, prestado por la institución educativa BZN.	1 semana
INSTRUCCIONES	
1. Realizar la guía en el cuaderno 2. Tomarle fotos y organizarlas en un archivo de Word o pdf 3. Subir el archivo en classroom o teams en la fecha indicada.	
GLOSARIO	
Rectas paralelas, rectas perpendiculares, la pendiente etc	
BIBLIOGRAFÍA Y/O CIBERGRAFÍA	
oasanez.jimdofree.com; Libro de matemáticas larouse: **todos por un nuevo país 10°**	